6.1 温度和烟气浓度

我们将考虑的第一个视觉流体现象是烟气,大致遵循Foster和Metaxas[FM97]和Fedkiw等人[FSJ01]的标准参考文件.添加了一些附加功能.在这种情况下,我们的流体是悬浮有烟雾颗粒的空气.为了模拟烟雾的最重要影响,我们需要两个额外的流体变量:气温和烟雾颗粒浓度(实际上是我们可以看到的).类似的现象,例如蒸气,可以以几乎相同的方式建模.通常，温度的SI单位为开尔文，为体积浓度.

还请记住,在模拟中所有空气非常重要,而不仅仅是的区域:在烟雾中看到的许多特征涡旋行为都取决于在附近清晰空气无散度约束.

在接下来的几节中讨论这些变量将如何影响空气速度之前,让我们弄清楚和应该如何演变.显而易见,温度和烟尘颗粒都会随流体移动,也就是说,我们将使用材质导数和来描述它们.这给了我们最简单的方程式,

并将是数值方法的第一步:当对流时,我们还将对流和.通常,我们会在压力值所在的网格中心离散化这两个变量.

对流的边界条件可以变化.正如我们前面所看到的,这些是在半拉格朗日方法中出现的,根据这些值,当从非流体网格单元进行插值或在网格边界之外进行跟踪时应判断使用哪些值. 对于绝缘固体,从流体中的最近点外推值是有意义的.对于能够将热量传导到流中的固体,可以使用固体自身的温度.除非固体是像火一样的烟源,并且可以提供有意义的值,否则应该从流体中推断出它.在开放边界处,和都应视为“环境”值-通常约为273K且.

为了使事情变得有趣,我们通常将体积源添加到域:在每个时间步长处,我们添加热量和烟雾到域.以PDE形式可以表示为

其中和是控制我们增加热量和烟雾速率的函数(在源外部应该为零),给出源的目标温度.可以在对流之后在源内的每个网格点实现此更新:

有关更多详细信息,所有这些源值都可以通过动画体积纹理进行调制.为避免因参数选择不当而导致过量,也可以将烟气浓度最大限制为1.

另一个有用的动画控件是允许一个或两个场的衰减:将一个场中的所有值乘以得出衰减率.这并不是真正的物理,但它是一种模拟诸如辐射造成的热量损失之类的简单方法.

热量和烟气浓度也都可以扩散,在这种情况下,非常小的现象(例如传导或布朗运动)与规模更大的过程(例如湍流混合)一起可以消除陡峭的梯度.可以用拉普拉斯算子建模,就像粘度一样:

这里,和是非负扩散常数.这些可以明显的方式离散化,例如温度:

对流中使用的相同边界条件在非流体点提供和值.但是,此更新仅在以下情况下是稳定的并且没有伪振荡:

如果无法满足此条件（或者距离满足尚远,以至于无法将时间分解为几个较小的子步骤来满足该条件太慢），则另一个简单的选择是对变量运行高斯模糊.实际上,除了边界条件外,所谓**热方程[heat-equation]**的精确解

在一段时间内是与以下高斯滤波器的卷积,在此上下文中,该滤波器称为**热核**:

利用高斯滤波器的可分性，可以通过维数有效地评估卷积。 有关详细信息，请参见有关图像处理的任何参考。

如果高斯滤波器的半径过大,则此方法也会存在缺陷:使滤波器快速运行是不平凡的,并且边界附近的伪影可能开始变得明显.在这种情况下,值得使用隐式积分.单步Backward Euler积分的看起来几乎与上面的公式相同,但是使用新的温度来评估扩散项:

在传导性固体边界,如果一个相邻的网格单元位于固体内部(例如),则应使用固体温度.在绝缘固体边界或自由表面处，应将该项（例如）与中心网格点的匹配贡献一起从方程中删除(因此,例如我们使用代替).实际上，这只是一个线性系统，其形式几乎与我们解决使流体不可压缩的压强所用的形式完全相同，只是系数略有不同，并且可以采用与新温度完全相同的方法来求解.

最后,在继续进行之前,应该注意的是,尽管这种方法在相当分散的情况下可以很好地工作,但是网格分辨率限制了其处理清晰定义的烟雾轮廓的能力.在这种情况下，首选是稍后在第7章中讨论的粒子方法。即使在网格上跟踪烟雾浓度以进行模拟，使用粒子仍然是首选——数百万粒子穿过速度场能提供比模拟本身还要多的细节!

6.2 浮力

现在我们来看和对速度的影响.在本节中,我们将介绍图形中常用的简化浮力模型.

我们都知道,热空气上升而冷空气沉下来.类似地,充满重烟尘颗粒的空气在重力作用下会被下拉.我们可以通过用浮力加速度代替动量方程中由于重力引起的加速度来对此建模:

其中和为非负系数,为环境温度(例如273K).请注意,我们将其与向下的重力矢量成比例-实际上,在零重力环境中不存在浮力.还要注意,如预期的那样,只要且,该公式就减小为零.

由于和通常存储在网格单元中心,因此我们需要进行一些平均以将加速度添加到MAC网格速度,例如.换句话说,当我们在projection之前将浮力添加到速度场时，在网格单元中心评估的加速度就是和之间的平均分割.

6.3 变化密度解算

浮力模型的基础是这样一个事实，即流体密度是温度的函数，如果我们将烟灰溶解在空气中，则烟气的浓度是温度的函数.让我们从温度的影响开始,现在取.根据理想的气体定律,热力学导出空气的密度应为

其中是绝对压强(SI单位为),是空气的气体常数(SI单位约为),是温度.这里应该强调的是，我们建议在此处使用的绝对压强近似为一个常数-不要和不可压缩性的压强求解相结合-否则,我们最终会陷入更为复杂的可压缩流模型:如果您有兴趣，Bonner[Bon07]已对MAC网格不可压缩仿真的概括中解决了这一问题.

添加一些密度为的烟并将浓度作为体积比例处理,我们可以将其扩展为

在这里,我们将相对密度差视为常数,即烟灰的热膨胀与空气相同. 这当然是错误的,但是相对于其他建模错误,我们认为此错误可以忽略.

在此阶段,可以通过在标准条件下线性化方程（6.3）来恢复前一节的浮力模型

其中是环境温度下烟雾自由空气密度,. 将其代入动量方程（我们将两边都乘以）得到

静止状态下恒密度流体的静水压强为;将实际压力写为该静水压强加上压强变化量的总和,以使.这简化了动量方程

现在,我们使Boussinesq近似为:假设，我们可以在第一项中降低密度变化,从而得出

除以可得出上一节中动量方程的浮力形式.这样就可以清楚地知道应将和选择为什么，尽管当然可以将它们保留为可调参数.(这也很清楚，我们在浮力模型中求解的压力不是全压力，而实际上只是静水压力之上的变化.)

对于较小的密度变化,这是一个很好的近似值.但是,对于图形中常见的更极端的情况，可以通过不采用Boussinesq近似来获得额外的真实感,即在压强求解中将密度视为变量.浮力模型仅在垂直方向上产生力，而完整模型可以沿任何压强梯度（例如，在流的旋转区域中径向向内）给出有趣的羽状流.

作为可变密度求解之前的第一步，应使用公式（6.3）确定MAC网格中每个速度样本的流体密度。 这需要以通常的方式平均从网格单元中心到网格单元表面的温度和烟气浓度。 这些u，v和w密度以两种方式修改压力投影。 现在是压力更新

如第5章末尾所示，矩阵A的系数也包含了密度.

使用可变密度求解时出现的一个可能的问题是，当存在较大的密度变化时，矩阵可能处于不良状态。 这意味着PCG将运行更多的迭代以返回准确的答案。 出于实用原因，因此有必要将密度限制在例如背景密度ρ0的0.05倍的下限。

6.4 散度控制

如果您认真阅读上一节,您可能已经注意到我们违反了质量守恒.不可压缩性意味着流体体积保持恒定,但是如果同时改变密度,则意味着质量必须改变.也许并不奇怪,但是,大多数观众并没有因为违规而烦恼:流体的动作非常复杂且难以预测,因此通常不会出现“问题”.也就是说,该问题的解决方案可以推广到烟雾中最有用的模拟控件之一:**散度控制**.

在热膨胀问题上,从根本上讲,我们确实希望流体在加热时膨胀并在冷却时收缩.换句话说,在温度的变化不为零的情况下,我们不需要无散度的速度场.让我们确切地导出我们想要的.

考虑流体的区域,当前的体积为.以速度经过的时间步长,假设体积变为.同时,假设该区域的平均密度从变为.质量守恒要求在忽略二次项后,得出

考虑一个无限小的区域，将的两边除以,我们得到

这是我们要在压强projection步骤中强制执行的散度,在该步骤中,我们评估由于温度和烟雾浓度的变化而导致的网格单元中心密度的变化.例如,如果温度升高导致密度降低,则我们需要正散度来实施该热膨胀.

这仍然有些草率-除了对质量变化所做的近似估计外,一个时间步长的密度变化与下一时间步长的流体在发散速度场中的运动之间还存在一定的滞后性——我们当然不能希望完全质量守恒.但是,它确实在模拟中提供了更一般的散度控制.在网格单元中心定义一个控制字段,该值等于流体整个体积中所需的体积变化率的期望比率:然后,我们求出压强以迫使这种发散.对于经典的体素化压强求解，这就像将添加到线性系统右侧的流体单元中一样简单.

请注意,在封闭区域内添加任意散度控制（没有自由表面）可能会导致线性系统不兼容:如果我们限制流体以维持其总体积(容器的体积),但要求其在内部膨胀或收缩,我们最终没有解决方案.因此，必须强制兼容条件,如第5章末尾所讨论的.